Annotate Highlight

Silvia Mónica Bernardis y Susana Moriena
Universidad Nacional del Litoral, Argentina
silvia.bernardis@gmail.com,
smoriena@yahoo.com.ar

Análisis de pruebas en un entorno de geometría dinámica

Resumen

Presentamos una investigación realizada con estudiantes ingresantes al Profesorado de Matemática, en la que estamos interesados en conocer si la propuesta de actividades diseñadas es pertinente para iniciar a los alumnos en las demostraciones geométricas.
Hemos realizado un análisis de las pruebas elaboradas por los alumnos, siguiendo la clasificación de pruebas que sugiere Balacheff.
Comprobamos que los alumnos que siguieron en forma continua el taller, han logrado mejorar su habilidad para realizar pruebas deductivas.

Abstract

We present an investigation with students to the mathematics teacher, in which we are interested in knowing whether the proposal of designed activities is relevant to initiate students in geometric demonstrations.
We have made an analysis of the tests developed by students, following the classification of evidence suggesting Balacheff.
We note that students, who followed continuously the workshop, have succeeded in improving its ability for deductive testing.

Palabras clave: análisis, pruebas, geometría dinámica.
Keywords: *analysis, proofs, geometry dynamic.*

1. Introducción

Uno de los objetivos de la enseñanza de la geometría en los niveles preuniversitarios y universitarios es que el alumno aprenda a validar sus conjeturas a través de una demostración. Para alcanzarlo es necesario que el alumno aprenda que no todo lo que se ve, es verdadero. En este sentido, Balacheff (2000a) menciona dos obstáculos respecto de las demostraciones geométricas:

- La evidencia de los hechos que se impone a la razón: los alumnos no experimentan la necesidad de demostrar, ya que las figuras son evidencia de la demostración.
- La enseñanza en matemática despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Por ejemplo, cuando el problema planteado se presenta de la forma "mostrar que...", el enunciado en cuestión es de hecho considerado como verdadero; lo que se está por descubrir es una demostración.

El primer obstáculo puede manifestarse más notoriamente cuando se utiliza un software de geometría dinámica en la enseñanza. "Una propiedad geométrica es un invariante perceptual. Esta evidencia perceptual es tan fuerte que incluso puede hacer que los estudiantes no lleguen a entender por qué es necesario demostrar una propiedad. Hasta cierto punto, la eficiencia del software ha eliminado la necesidad de la demostración" (Balacheff, 2000b:95).

En relación con el segundo obstáculo, en las actividades a desarrollar en estos entornos, los estudiantes investigan sobre un problema y descubren determinadas propiedades geométricas. "En matemática, transformar las herramientas que se usan conduce a un cambio de los problemas que resulta interesante plantear, más que a una transformación de la matemática en sí, como muchas veces se ha afirmado" (Balacheff, 2000b:96).

En este sentido, hemos diseñado una secuencia de actividades cuya resolución involucra el concepto y propiedades de la simetría axial en torno a un problema [más detalles en Bernardis y Moriena (2007)] que incluimos como anexo, con el objetivo de que los estudiantes realicen exploraciones empíricas, entiendan la necesidad de justificar sus conjeturas y se inicien en la producción de pruebas deductivas.

2. Marco teórico

Para fundamentar las respuestas que esperamos de los estudiantes en estas actividades seguimos las ideas de Balacheff (2000a), quien clasifica las pruebas de los estudiantes en dos categorías: pragmáticas o experimentales y conceptuales o deductivas. Para las pruebas pragmáticas introduce una clasificación en varios tipos:

- *Empirismo naïf:* el proceso consiste en la verificación de la propiedad para unos pocos ejemplos elegidos sin ningún criterio. Se caracterizan por la ausencia de validación, es el tipo más elemental de prueba.
- *Experimento crucial:* los procedimientos de los estudiantes se basan en la elección minuciosa de un ejemplo, tan poco particular como le es posible, convencidos de que si se cumple allí, se cumplirá siempre.
- *Ejemplo genérico:* es el caso de procedimientos basados en la elección y manipulación de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase. Los estudiantes empiezan a usar propiedades abstractas en sus pruebas, aunque referidas al ejemplo. Si suprimimos el dibujo usado, la prueba que queda pierde información o carece de significado.

Para las pruebas conceptuales o deductivas, Balacheff distingue los siguientes tipos:

- *Experimento mental:* la explicación se centra en la acción interiorizada, separándola de su ejecución sobre un representante particular. Es una prueba deductiva abstracta organizada a partir de manipulaciones de ejemplos concretos. Es posible suprimir los dibujos realizados que acompañan a la prueba, sin que pierda signifi-

cado. Este tipo de prueba aparece como medio para fundamentar las soluciones propuestas en un esfuerzo de explicación.
- *Cálculo sobre enunciados:* son construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales.
Siguiendo a Rodríguez Díaz (2006) llamaremos pruebas *fallidas* a los casos en que los estudiantes no son capaces de seguir un camino de solución que lleve al planteamiento de una conjetura o de una prueba o bien a aquellos en los que no hacen nada o cuando no se puede inferir nada de sus respuestas.

Para situarnos en el nivel de razonamiento de los estudiantes en esta etapa, tuvimos en cuenta el proceso de aprendizaje de la prueba desde el análisis de los Niveles de Razonamiento de Van Hiele, en particular los que tienen que ver con la demostración, que resumimos a continuación (más detalles en Jaime y Gutiérrez, 1990):
- *Nivel 1: (reconocimiento)*. No hay demostración. La verdad de una afirmación se justifica por la observación de una figura.
- *Nivel 2: (análisis)*. Demostración empírica. La verdad de una afirmación se verifica en uno o más ejemplos, realizando mediciones, transformaciones, recuentos etcétera.
- *Nivel 3: (clasificación)*. Demostración deductiva informal. La verdad de una afirmación se demuestra mediante un argumento deductivo informal, después de analizar ejemplos o realizar mediciones, transformaciones.
- *Nivel 4: (deducción formal)*. Demostración deductiva formal. La verdad de la proposición se demuestra mediante la producción de demostraciones deductivas formales. Los estudiantes son capaces de aceptar diferentes formas de demostración y de comprender la estructura axiomática de la matemática: significado y uso de axiomas, definiciones, teoremas, etcétera.
- *Nivel 5: (rigor)*. Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del inicial de la Geometría Euclidea, capacidad para compararlos y decidir sobre su equivalencia.

Este modelo refleja que el aprendizaje de la demostración es un camino largo que los estudiantes deben recorrer y que no es posible saltear niveles y exigir a los estudiantes de un nivel que realicen demostraciones correspondientes a un nivel superior de razonamiento, sino que es importante que se recorra este camino acompañándolos en su evolución hacia las demostraciones deductivas.
Es preciso aclarar que utilizaremos el término *prueba* directamente extraída de los trabajos de Balacheff, quién distingue entre explicaciones, pruebas y demostraciones (Balacheff, 2000a):
- *Explicación:* es todo discurso desarrollado por una persona o un grupo cuyo objetivo es comunicar a otro el carácter de veracidad de un enunciado matemático.
- *Prueba:* son explicaciones aceptadas por otros, en un momento dado. Así una explicación puede tener el estatus de prueba para un grupo social pero no para otro.
- *Demostración:* son pruebas particulares, se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas lógicas. Los procesos sociales en el seno de la comunidad matemática juegan un papel importante: Una demostración se convierte en tal, después del acto social de "aceptar que lo es".

3. Metodología

El estudio consiste en el diseño de una propuesta de enseñanza de geometría basada en el uso de un entorno de geometría dinámica, su implementación y la observación y el análisis de las producciones de los estudiantes.
Los objetivos de nuestra investigación son:

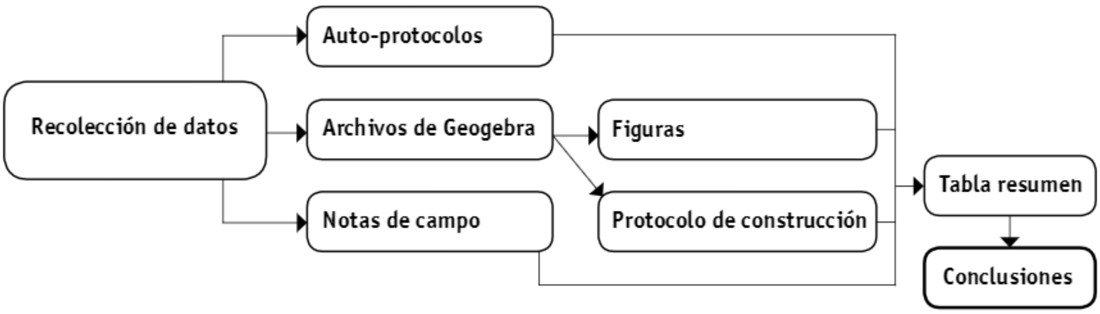
- Analizar si las actividades son pertinentes para iniciar a los alumnos en las pruebas geométricas.
- Identificar los tipos de pruebas que realizan los estudiantes.

El análisis previo de la propuesta se realiza en Bernardis y Moriena (2007). En el presente artículo incluimos la descripción de la implementación y el análisis de las respuestas.
Este taller se realizó con estudiantes que ingresaron a la universidad en el año 2008, la elección de participar en el mismo fue voluntaria. Participaron 10 (diez) alumnos, conformando parejas de trabajo.
Para el análisis de los resultados se tomaron 4 (cuatro) grupos que cursaban la asignatura Matemática Básica, cuatrimestral del primer ciclo del Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional del Litoral, de la ciudad de Santa Fe, Argentina. Es preciso aclarar que los estudiantes no habían tomado ningún curso sistemático de Geometría Euclidea, los conceptos previos que poseen son los que recuerdan de su paso por la escuela primaria y secundaria.
La experiencia se desarrolló en cinco clases de dos horas, un día a la semana, trabajando en el laboratorio de informática y utilizando el software Geogebra.
El trabajo consistía en el desarrollo de las actividades que figuran en el anexo. La estructura de las clases fue la siguiente:
- Se leían las consignas, trabajando en parejas.
- Cada grupo intentaba resolverlas por separado, uno de los estudiantes realizaba la construcción en la computadora y el otro escribía el autoprotocolo (que definiremos más adelante).
- Los docentes acompañaban la actividad evaluando si era necesario dar alguna ayuda.
- Al finalizar la actividad, cada pareja exponía su conjetura y explicaba sus fundamentos y se discute entre toda la clase bajo la moderación de la docente.

Para resolver un problema de conjetura y prueba con la ayuda de un software de Geometría Dinámica (GD) los estudiantes empiezan construyendo una figura basada en las hipótesis del problema, después hacen experimentaciones mediante arrastre de elementos de la figura, buscando regularidades que les permitan identificar una conjetura o comprobar su validez en una variedad de ejemplos y, por último, identifican propiedades matemáticas observables en la pantalla que permitan descubrir un camino de prueba de la conjetura validada por la experimentación.
Para entender cómo trabajaron los estudiantes y por qué utilizaron determinados procedimientos hemos decidido:
- Guardar los archivos creados por los estudiantes para analizar el protocolo de construcción.
- Solicitar a los estudiantes que elaboren un autoprotocolo escrito, donde van escribiendo notas comentando toda su actividad, los motivos de sus decisiones, etc., ver Gutiérrez (2005) y Rodríguez Díaz (2006).
- Realizar notas de campo del investigador, anotando todo lo que sucedía en las actividades, sus consultas, observaciones, las aclaraciones que fueron necesarias.
- Asumir el rol docente como co-partícipe de las actividades propuestas, respondiendo a las dudas que vayan surgiendo.

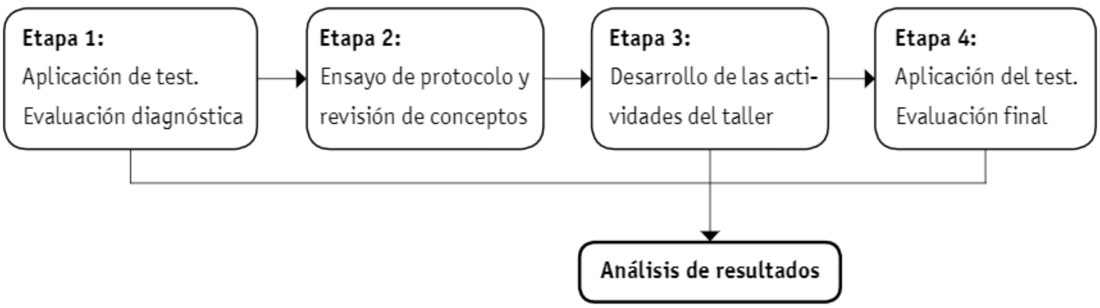
Para lograr el máximo de información sobre los procesos cognitivos realizados por los alumnos en cada actividad en sus intentos de producir pruebas a sus conjeturas, es que hemos decidido recoger las producciones de los alumnos "en borrador", es decir todo lo que escribieron en las hojas en blanco mientras conjeturaban, proponían justificaciones, abandonaban conjeturas, etc. Para ello solicitamos a los grupos que escribieran un guión de lo que hacían y pensaban, qué decisiones tomaban y por qué las tomaban o cualquier otro aspecto que consideraban inte-

resante o que influyó en su trabajo. Es decir, el auto-protocolo que proponen Gutiérrez (2005) y Rodríguez Díaz (2006).
Para realizar el análisis integramos, para cada actividad, estos datos en una tabla que incluía:
- Un resumen del auto-protocolo de cada pareja, con transcripciones significativas.
- Comentario del investigador.
- Las figuras realizadas con Geogebra.
- Los protocolos de construcción de cada figura.



Comenzamos con la aplicación de una evaluación diagnóstica que consistía en la resolución con lápiz y papel de un problema. Luego en la fase de información revisamos algunas cuestiones necesarias para el desarrollo de la experiencia. Todas las actividades propuestas, tanto la incluida en el test como las restantes, involucran el uso de la simetría axial en su resolución.

Luego de desarrollado el taller volvimos a aplicar el mismo test que utilizamos en la evaluación diagnóstica para poder analizar la evolución de los alumnos.
En el siguiente diagrama se resume la metodología de investigación, planteada en etapas, en ellas se realizaron acciones de investigación para el cumplimiento de los objetivos de la misma:



4. Análisis de los tipos de pruebas realizadas por los estudiantes

4.1. Evaluación previa

Antes de comenzar con las actividades, propusimos a los estudiantes que, en forma individual, resuelvan el siguiente problema con lápiz y papel.

Demostrar que si en un lado de un triángulo equilátero marcamos un punto P, la suma de las distancias a los otros dos lados es igual a la altura.

En esta actividad comprobamos que la mitad de los alumnos sólo construye la figura de la situación, considerando estos casos como *pruebas fallidas*. El resto de los alumnos realizan mediciones y comprueban con un ejemplo particular la propiedad, realizan pruebas del tipo *empirismo naïf*.
Describiremos a continuación un ejemplo observado de este último tipo de prueba.
En la Figura 1 se muestra un ejemplo en el que los alumnos verifican para un caso particular la proposición que se pedía probar, tomando un triángulo equilátero de lado 3 cm y el punto P como pie de la altura. Consideran en forma errónea la distancia a los lados sobre la base del triángulo y hallan H utilizando el Teorema de Pitágoras. Si bien las respuestas obtenidas no coinciden, el estudiante utiliza la aproximación para H de 3 cm para forzar la igualdad buscada. Justificando así a partir del ejemplo particular obtenido.

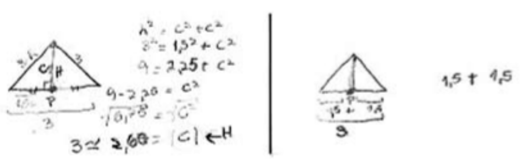


Figura 1.

Figura realizada por el Grupo 1 en la evaluación previa

En el siguiente cuadro resumimos los tipos de prueba observados:

Tipos de pruebas	PF	EN	EC	EG	EM	CE
N° de grupos	2	2				

PF: *Pruebas fallidas.* ***EN:*** *Empirismo naïf.* ***EC:*** *Experimento crucial.* ***EG:*** *Ejemplo genérico.* ***EM:*** *Experimento mental.* ***CE:*** *Cálculo sobre enunciados.*

En el análisis previo de la secuencia de actividades (Bernardis y Moriena, 2007) supusimos que los estudiantes se hallan en el Nivel 2 de *análisis*, en lo que se refiere a los niveles de razonamiento según Van Hiele, pero después de este diagnóstico, observamos que algunos alumnos se encuentran aún transitando el Nivel 1 de *reconocimiento*, ya que existe ausencia de todo tipo de validación.

4.2. Fase de información

La actividad del taller comenzó con una revisión de conceptos previos necesarios para resolver las distintas etapas del problema que plantearíamos luego. En esta fase de información, también ensayamos la escritura del autoprotocolo y presentamos los comandos y herramientas del software que utilizaríamos.

4.3. Fase de orientación dirigida

4.3.1. Actividad 1

En general, ningún grupo tuvo dificultades en representar la figura con las hipótesis del problema. Las respuestas obtenidas respecto de la ubicación del punto R, en cada grupo, fueron las siguientes:
- En el punto medio del segmento AB.
- Hallaron el punto medio del segmento PQ, trazaron una recta perpendicular a la banda inferior,

por el punto medio del segmento PQ. Determinaron el punto R como intersección de esta recta con la banda inferior (ver Figura 2).

- Ubicaron un *nuevo punto* en la pantalla R sobre la banda inferior, como objeto libre que al desplazarlo puede salirse de ella.
- Luego de ubicar R sobre la banda inferior (*punto sobre objeto*) lo desplazaron hasta lograr que el ángulo PRQ sea recto.

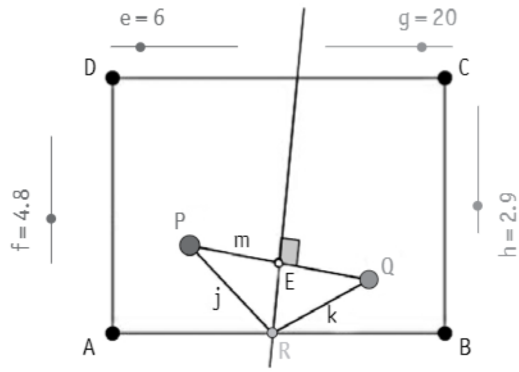


Figura 2.

Figura realizada por el Grupo 1 en la Actividad 1

Las respuestas de la mayoría de los estudiantes (3 grupos de los 4) fueron del tipo empirismo naïf, tomaron un ejemplo que eligieron sin ningún criterio, esta situación a veces está aclarada: *"lo elegimos sin ningún fundamento"*.

En general buscaron un punto de la banda inferior que se encuentra entre las proyecciones de P y Q sobre dicha banda, y muchos pensaron en el punto medio, situación que suponemos puede ser prototípica, ya que en la experiencia escolar hallar un punto entre otros dos ha sido la búsqueda del punto medio. Además este grupo de alumnos había trabajado en la asignatura Matemática Básica con la determinación de las coordenadas del punto medio entre otros dos puntos del plano junto con otros contenidos de geometría analítica, por lo que pensamos que buscaron aplicar estos conceptos.

Los tipos de prueba que realizaron los alumnos en esta actividad son resumidos en el siguiente cuadro:

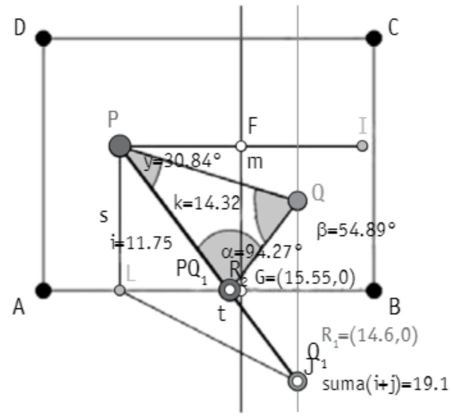
Tipos de pruebas	**PF**	**EN**	**EC**	**EG**	**EM**	**CE**
N° de grupos	1	3				

PF: *Pruebas fallidas.* ***EN:*** *Empirismo naïf.* ***EC:*** *Experimento crucial.* ***EG:*** *Ejemplo genérico.* ***EM:*** *Experimento mental.* ***CE:*** *Cálculo sobre enunciados.*

4.3.2. Actividad 2

Al sugerir, en la consigna de la actividad, el cálculo de la suma de las medidas de la longitud de los segmentos PR y RQ, los estudiantes confirmaron la suposición de que el punto R se encuentra entre las proyecciones de P y Q sobre la banda inferior, pero abandonaron la conjetura de ubicar a R en el punto medio y la de afirmar que el ángulo PRQ debe ser recto.

En cuanto al tipo de prueba, la mayoría de los estudiantes (3 grupos de los 4) realizó una elección minuciosa del ejemplo, tan poco particular como les fue posible, ya que como podemos observar en la Figura 3, ubicaron el punto R_1 sobre la banda inferior (como *punto sobre objeto*), es decir que al desplazarlo no puede salirse de la misma, se mueve sobre dicho segmento. Exhibieron las coordenadas del punto y, a través de desplazamientos del mismo, buscaron que la suma (que exponen en la pantalla) sea mínima. Respondieron en forma aproximada, R_1 se encuentra a 14.6 unidades de la banda izquierda, con aproximaciones en sus coordenadas para ubicar el punto R. Estas pruebas fueron, por tanto, del tipo *experimento crucial*. Dado que la elección del ejemplo particular es minuciosa, está controlada por el resultado obtenido de la suma.



R_1 **está a 14,6 de la banda izquierda**

Figura 3.

Figura realizada por el Grupo 1 en la Actividad 2

Los tipos de prueba que realizaron los estudiantes en esta actividad son resumidos en el siguiente cuadro:

Tipos de pruebas	**PF**	**EN**	**EC**	**EG**	**EM**	**CE**
N° de grupos		1	3			

PF: *Pruebas fallidas.* ***EN:*** *Empirismo naif.* ***EC:*** *Experimento crucial.* ***EG:*** *Ejemplo genérico.* ***EM:*** *Experimento mental.* ***CE:*** *Cálculo sobre enunciados.*

4.3.3. Actividad 3

La orientación, en la consigna de la actividad de pensar hasta donde seguiría la bola si no hubiera banda inferior, en primera instancia los desorienta, ya que casi todos pensaron que seguiría hasta el infinito.

Evidentemente las creencias de los alumnos cuentan en este sentido, lo que pensamos que iba a servir para ubicarlos en la situación, provocó una discusión que debió ser aclarada por el docente.

Por lo tanto será necesario realizar alguna modificación en este enunciado para lograr el objetivo que perseguimos con la consigna. Sugerimos que pensaran que habían resuelto el problema y hallaron el recorrido de la bola P, pero al realizar ese recorrido se retiraba la banda inferior.

Para orientar el razonamiento en función del objetivo de la actividad, sugerimos aquí que ubicaran otro punto R_2 sobre la banda inferior y comparen las sumas, pedimos que traten de justificar por qué el recorrido hallado era el mínimo.

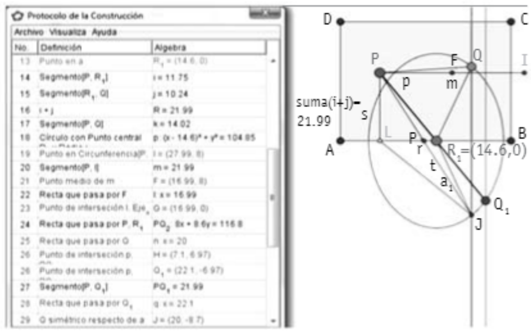


Figura 4.

Figura realizada por el Grupo 2 y protocolo de construcción de la misma

Como observamos resaltado en el recuadro del protocolo de construcción de la Figura 4 de este grupo: el punto R_1 fue creado como *punto sobre el segmento a*, a partir del mismo esta pareja realizó todas las transformaciones en su figura. Los estudiantes ubicaron el punto R_1 como punto sobre objeto en la banda inferior, utilizando modo "desplaza", lograron que la suma de las longitudes de los segmentos P R_1 y R_1Q resulte mínima, sobre este representante realizaron las acciones. Elaboraron pruebas del tipo de *ejemplo genérico*, ya que si no visualizamos la figura realizada se pierde información de la prueba, además las transformaciones que realizaron las hicieron sobre este representante particular (controlado por la suma). Se observan construcciones de circunferencias, rectas paralelas, etc., y además aparecen en la explicación propiedades geométricas.

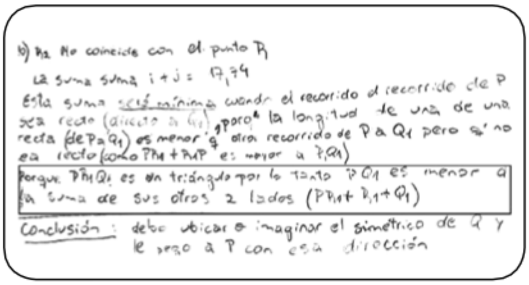


Figura 5.

Autoprotocolo del Grupo 4

A continuación se transcribe el auto-protocolo incluido en la Figura 5.

> *R_2 no coincide con el punto R.*
> *La suma i+j=17,74*
> *Esta suma <u>será mínima</u> cuando el recorrido de P sea recto (directo a Q_1) es menor porque es longitud de una recta que otro recorrido de P a Q_1 pero que no es recto (como PR_1+R_1P es mayor a PQ_1)*
> *Porque PR_1Q_1 es un triángulo por lo tanto PQ_1 es menor a la suma de sus 2 lados ($PR_1+R_1Q_1$)*
> *<u>Conclusión</u>: debo ubicar o imaginar el simétrico de Q y le pego a P con esa dirección.*

Los tipos de prueba que realizaron los alumnos en esta actividad son resumidos en el siguiente cuadro:

Tipos de pruebas	**PF**	**EN**	**EC**	**EG**	**EM**	**CE**
N° de grupos				4		

PF: *Pruebas fallidas.* ***EN:*** *Empirismo naïf.* ***EC:*** *Experimento crucial.* ***EG:*** *Ejemplo genérico.* ***EM:*** *Experimento mental.* ***CE:*** *Cálculo sobre enunciados.*

4.4. Fase de orientación libre

4.4.1. Actividad 4

Los estudiantes lograron aplicar los conocimientos, lenguaje y construcciones realizadas en la fase de orientación dirigida. Validaron sus conjeturas centrándose en la acción interiorizada, separándose del representante particular. En un esfuerzo de explicación los estudiantes se encaminaron hacia pruebas del tipo experimento mental. Describiremos lo realizado por uno de los grupos.

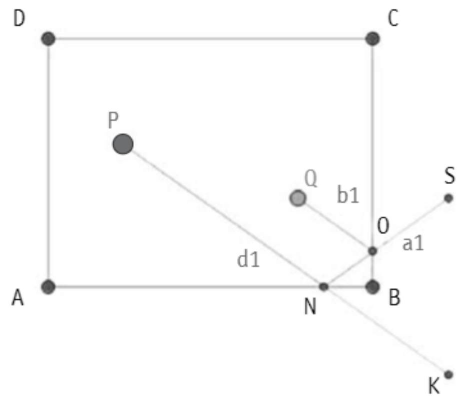


Figura 6.

Figura realizada por el Grupo 2 de la Actividad 4

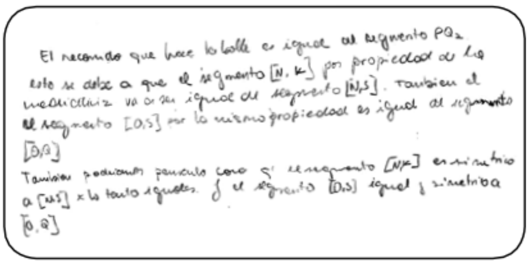


Figura 7.

Parte del autoprotocolo del Grupo 2 de la Actividad 4

El texto extraído del auto-protocolo de este grupo se transcribe en el siguiente recuadro:

El recorrido que hace la bola es igual al segmento PQ_2 esto se debe a que el segmento [N,K] por propiedad de la mediatriz va a ser igual al segmento [N,S]. También el segmento [O,S] por la misma propiedad es igual al segmento [O,Q].
También podríamos pensarlo como que el segmento [N,K] es simétrico a [N,S] por lo tanto son iguales y el segmento [O,S] igual y simétrico a [O,Q].

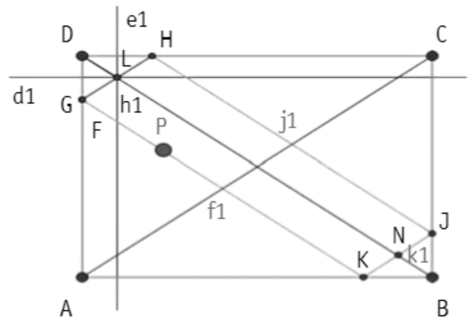


Figura 8.

Figura realizada por el Grupo 4 en la Actividad 5

Como podemos observar en la Figura 6 este grupo construyó el recorrido para el caso de las dos bandas, logrando extender lo realizado en las actividades anteriores. La Figura 7 nos muestra una parte del auto-protocolo del mismo grupo, donde fundamentaron que el segmento PQ_2 tiene la misma longitud que el camino recorrido por la bola P, utilizando propiedades de la mediatriz, incluso dieron otro argumento basado en las propiedades de la simetría.

Resumidos en el siguiente cuadro los tipos de prueba que realizaron los alumnos en esta actividad:

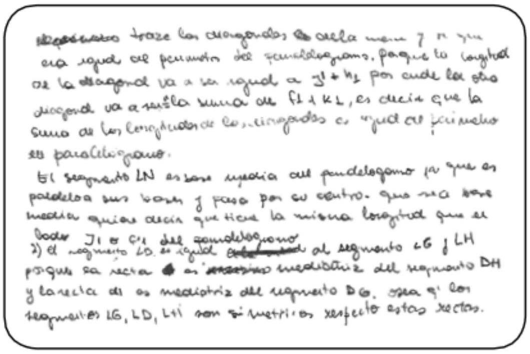


Figura 9.

Autoprotocolo del Grupo 4 de la Actividad 5

Tipos de pruebas	PF	EN	EC	EG	EM	CE
N° de grupos					4	

PF: *Pruebas fallidas.* ***EN:*** *Empirismo naif.* ***EC:*** *Experimento crucial.* ***EG:*** *Ejemplo genérico.* ***EM:*** *Experimento mental.* ***CE:*** *Cálculo sobre enunciados.*

El texto extraído del autoprotocolo de este grupo se transcribe en el siguiente recuadro:

Tracé las diagonales de la mesa y vi que era igual al perímetro del paralelogramo, porque la longitud de la diagonal va a ser igual a j_1+h_1 por ende la otra diagonal va a ser la suma de f_1+k_1, es decir que la suma de las longitudes de las diagonales es igual al perímetro del paralelogramo.
El segmento LN es base media del paralelogramo, ya que es paralelo a sus bases y pasa por su centro. Que sea base media quiere decir que tiene la misma longitud que el lado j_1 o f_1 del paralelogramo.
El segmento LD es igual al segmento LG y LH porque la recta es mediatriz del segmento DH y la recta d1 es mediatriz del segmento DG, o sea que los segmentos LG, LD, LH son simétricos respecto estas rectas.

4.5. Fase de integración

4.5.1. Actividad 5

Finalmente los alumnos lograron una visión global de todo lo aprendido, integrando los nuevos conocimientos con otros ya estudiados. Describiremos lo realizado por uno de los grupos en esta actividad.

Como podemos observar en la Figura 8 y en la Figura 9 del autoprotocolo, este grupo utilizó propiedades de la base media del paralelogramo y de la mediatriz al realizar la prueba de su conjetura. Al explorar las propiedades de la figura, los estudiantes realizaron pruebas basadas en un análisis de acciones interiorizadas. Realizaron pruebas del tipo experimento mental, encaminándose hacia pruebas deductivas.

En el siguiente cuadro resumimos los tipos de prueba que realizaron los alumnos en esta actividad:

Tipos de pruebas	PF	EN	EC	EG	EM	CE
N° de grupos					4	

PF: *Pruebas fallidas.* ***EN:*** *Empirismo naïf.* ***EC:*** *Experimento crucial.* ***EG:*** *Ejemplo genérico.* ***EM:*** *Experimento mental.* ***CE:*** *Cálculo sobre enunciados.*

4.6. Evaluación final

Finalmente propusimos a cada grupo que resuelva el mismo problema que habíamos tomado como evaluación previa.

En esta actividad ellos mismos se mostraron sorprendidos al realizar la construcción de la figura con las hipótesis del problema y validar su conjetura utilizando propiedades geométricas. Realizaron demostraciones del tipo *experimento mental*.

Como podemos observar en la Figura 9, realizaron construcciones para comprobar la validez del enunciado y transformaciones de la figura para organizar la prueba del mismo. En la Figura 10 el auto-protocolo nos muestra que utilizaron propiedades geométricas para explicar su validez.

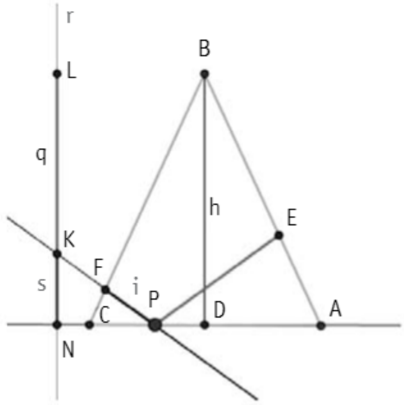


Figura 10.

Figura realizada por el Grupo 4 en la Evaluación final

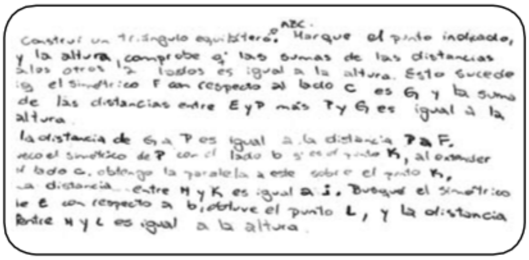


Figura 11.

Autoprotocolo del Grupo 4

Construí un triángulo equilátero ABC. Marqué el punto indicado y la altura, comprobé que las sumas de las distancias a los otros dos lados es igual a la altura. Esto sucede porque el simétrico de F con respecto al lado c es G y la suma de las distancias entre E y P más T y G es igual a la altura.

La distancia de G a P es igual a la distancia de P a F. Luego el simétrico de P con el lado b que es el punto K, al extender el lado c con respecto a b, obtuve el punto L, y la distancia entre N y L es igual a la altura.

En el siguiente cuadro resumimos los tipos de prueba que realizaron los alumnos en esta actividad:

Tipos de pruebas	PF	EN	EC	EG	EM	CE
N° de grupos					4	

PF: *Pruebas fallidas.* ***EN:*** *Empirismo naif.* ***EC:*** *Experimento crucial.* ***EG:*** *Ejemplo genérico.* ***EM:*** *Experimento mental.* ***CE:*** *Cálculo sobre enunciados.*

5. Conclusiones

Hemos observado que la forma de construcción de una figura, el uso del modo "desplaza", y de las herramientas del software, hacen que los ejemplos que manipulan los alumnos adquieran con facilidad el carácter de ejemplo genérico o de experimento mental antes que el de empirismo *naïf* o experimento crucial.

Los estudiantes que lograron avances realizaron pruebas deductivas informales, que surgieron como resultado del trabajo de experimentación con arrastres, mediciones, transformaciones, exploración, conjetura, esfuerzos de validación a través de la explicación.

Además, todos los grupos utilizaron para la justificación del problema planteado en el test la simetría axial, que aparece aquí como una herramienta matemática disponible para la validación de los enunciados.

Si bien Balacheff considera que el software de GD podría convertirse en un obstáculo para que los estudiantes entiendan la necesidad de demostrar y aprendan a hacerlo, en esta experiencia hemos comprobado que la facilidad para observar en una figura una gran variedad de ejemplos y el dinamismo de la misma, conducen a los alumnos a convencerse de la veracidad de la conjetura. Las pruebas surgen en un esfuerzo de explicar por qué la misma es verdadera.

Consideramos importante al diseñar actividades de este tipo tener presente las siguientes cuestiones:

- Seguir las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.
- Proponer enunciados abiertos, sin quitarles a los estudiantes la responsabilidad de justificar la validez de los mismos.
- Plantear situaciones tomando etapas, que no pretenden ser fijas, como por ejemplo:
    - Exploración libre y formulación de conjetura.
    - Exploración y formulación de la conjetura con la función "desplaza".
    - Validación de la conjetura.
    - Extensiones del problema.
    - Exploración de propiedades.

Sin intención de dar carácter general a las conclusiones de este estudio, hemos podido comprobar que este tipo de actividades resultan adecuadas para acompañar a los estudiantes en su evolución hacia las demostraciones deductivas.

Las actividades contribuyeron a mejorar el nivel de las habilidades de prueba de los estudiantes, destacándose una tendencia de transición hacia la producción de pruebas de un mejor nivel al que se había obtenido en la evaluación diagnóstica.

Anexo

Evaluación previa

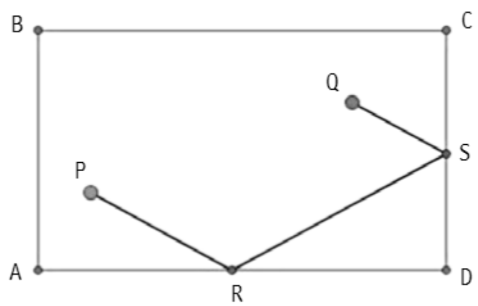
Te pedimos que con los conocimientos que tienes del colegio secundario, trates de resolver el siguiente problema:

Demostrar que si en un lado de un triángulo equilátero marcamos un punto P, la suma de las distancias a los otros dos lados es igual a la altura.

Problema planteado:

Jugando al billar

Carlos y Juan, su profesor de matemáticas, están jugando al billar. Al poco tiempo Carlos le pregunta a Juan: ¿qué recorrido tendrá que hacer la bola P para dar a la bola Q después de tocar en dos bandas?



Actividad 1:
Exploración y formulación de conjetura

Una de las reglas básicas en la resolución de problemas consiste en empezar por lo más fácil: estudiaremos primero como conseguirlo a "una" banda (la inferior).

1) Construye una figura dinámica para una mesa de 26x14 unidades, que te permita observar todas las posibles ubicaciones de las bolas P y Q. Para ello utiliza, en cada punto, un deslizador para cada coordenada del mismo.

2) ¿Seguro que la figura es dinámica, es decir que la mesa es siempre la misma y las bolas pueden estar en cualquier posición dentro de la mesa?

3) ¿Qué recorrido tendría que hacer la bola P para dar a la bola Q después de tocar en la banda inferior? Explica tu conjetura.

4) Compárala con las de tus compañeros.

Actividad 2:
Exploración y formulación de la conjetura con la función "desplaza"

5) Ubica un punto R_1 que se mueva sobre la banda inferior. Traza los segmentos PR_1 y R_1Q, mídelos. Si deseamos que la bola P toque la banda inferior y luego le dé a la bola Q, debemos tener en cuenta que: "Las bolas de billar siguen la trayectoria mínima entre P, la banda y Q". ¿Cuál es? Escribe tu conjetura.

6) Calcula la suma de las longitudes de PR_1 y de R_1Q. Desplaza el punto R_1 sobre la banda inferior. ¿Esto confirma tu conjetura? Si no, ¿puedes modificarla?

7) Explica tu conjetura y compárala con las de tus compañeros.

Actividad 3:
Validación de la conjetura

Si no hubiera banda inferior, ¿hasta dónde seguiría la bola P? Construye su recorrido, nómbralo PQ_1.

1) ¿Qué relación encuentras entre el punto Q y el punto Q_1?

2) Nombra R_2 al punto de intersección del segmento PQ_1 y la banda inferior. Desplaza el punto R_1 hasta ubicarlo en el segmento PQ_1. Suma la longitud de PR_1 con la de R_1Q. ¿Cuándo será mínima esta suma. ¿Esto confirma tu conjetura?

3) Utiliza la verificación de propiedades para comprobar si tu conjetura es verdadera.

4) Escribe tu conclusión final.

5) Compara tus explicaciones con las de tus compañeros. ¿Estás de acuerdo? ¿Cuál es más satisfactoria? ¿Por qué?

Actividad 4:
Resolución del problema inicial, con dos bandas

13) Explora el camino que seguirá la bola P después de rebotar en dos bandas para chocar a la bola Q. ¿Cuántas soluciones diferentes puedes encontrar? ¿Hay en ellas algún caso especial?
14) Compara las longitudes del segmento PQ_2 (siendo Q_2 el simétrico del punto Q_1 respecto de la banda inferior) y la longitud total del camino recorrido por la bola P. ¿cómo son ambas longitudes? ¿Podrías explicar por qué?
15) Compara tus explicaciones con las de tus compañeros.

Actividad 5:
Extensiones del problema

16) Y algo más difícil, dice Juan a Carlos: "¿En qué dirección tendrás que lanzar la bola para que, después de tocar las cuatro bandas del billar, vuelva al mismo punto?
17) ¿Cuántas soluciones diferentes puedes encontrar? ¿Cuál será la longitud del camino recorrido por la bola?
18) Observa en la Figura construida en la pregunta 17): ¿cómo están relacionados los puntos U, P y R?
19) Trata de relacionar las dimensiones de la mesa de billar y la distancia total recorrida por la bola, después de tocar las cuatro bandas y volver al mismo punto. ¿Existe alguna relación?
20) El camino obtenido forma un paralelogramo. ¿Podrías explicar por qué?
21) Halla el perímetro de este paralelogramo. ¿Observas alguna relación? ¿Cuál?
22) Traza las diagonales del rectángulo ABCD. ¿Esto confirma tu conjetura?
23) Explica y compara con las explicaciones de tus compañeros.

Bibliografía

Balacheff, N. (2000a). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá, Una empresa docente y Universidad de Los Andes.

Balacheff, N. (2000b). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En M.N. Gorgorió i Solá y J. Deulofeu Piquet (coords.): *Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, Barcelona, GRAÓ, pp. 91-108.

Bernardis, S. y Moriena, S. (2007). Geometría Dinámica: un recurso para iniciar a los estudiantes en las demostraciones, *Yupana*, 4, 53-66.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (eds.): *Teoría y práctica en educación matemática*, Sevilla, Alfar, pp. 295-384.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre el aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. En A. Maz Machado, B. Gómez Alfonso y M. Torralbo Rodríguez (eds.): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Córdoba, Universidad de Córdoba, pp. 27-44.

Rodríguez Díaz, F. (2006). *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemática*, Tesis de Maestría. Universidad de Valencia, Valencia.